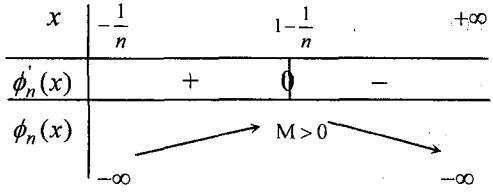

$M = \phi_n(1-\frac{1}{n}) = \ln(1+n-1) - (1-\frac{1}{n}) = \ln n - (1-\frac{1}{n}) > 0$ (d'après 1°/)

• On a : ϕ_n est une bijection de $]-\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}[$ sur $]-\infty, M[$

or $0 \in]-\infty, M[$ d'où l'équation $\phi_n(x) = 0$ admet dans l'intervalle

$]-\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}[$ une seule solution. Comme $\phi_n(0) = 0$ et

$0 \in]-\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}[$ donc cette solution est nulle.

• On a : ϕ_n est une bijection de $[1-\frac{1}{n}, +\infty[$ sur $]-\infty, M]$

$0 \in]-\infty, M]$ d'où l'équation $\phi_n(x) = 0$ admet une seule solution

α_n dans l'intervalle $]1-\frac{1}{n}, +\infty[$.

3°/a) On a : $\ln(1+n\alpha_n) = \alpha_n$

On a : $\alpha_n > 1-\frac{1}{n} \Rightarrow n\alpha_n > n-1 \Rightarrow n\alpha_n + 1 > n$

$\Rightarrow \ln(1+n\alpha_n) > \ln n \Rightarrow \alpha_n > \ln n$

b) On a : $\phi_n(2\ln n) = \ln(1+2n\ln n) - 2\ln n$

$= \ln(1+2n\ln n) - \ln n^2 = \ln(\frac{1+2n\ln n}{n^2})$

or $\ln n < \frac{1}{2}(n-\frac{1}{n}) \Rightarrow 2n \ln n + 1 < n^2 \Rightarrow \ln(\frac{2n\ln n + 1}{n^2}) < 0$

$\Rightarrow \phi_n(2\ln n) < 0$

On a : $1-\frac{1}{n} < \ln n < 2\ln n$

ϕ_n est strictement décroissante sur $[1-\frac{1}{n}, +\infty[$; $\alpha_n \in [1-\frac{1}{n}, +\infty[$.